Física de Radiaciones I
Hoja 1 - 2017 - Instituto de Física

1. Calcule la serie de Fourier de una onda sinusoidal rectificada, $f(x)=\begin{cases}\sin(x), & \sin(x)>0\\ 0, & \sin(x)<0\end{cases}$

2. Escriba la función f(x)=x en [0,1] como una serie en
a. cosenos, b. senos. c. senos y cosenos

3. Repita el ejercicio anterior para f(x) = x-1 definida en el intervalo [1,2].

4. Encuentre la relación entre los coeficientes de Fourier de la función periódica f(x) de período 2L y la función g(x) = f(x+a), donde a es una constante.

5. Muestre que los coeficientes de Fourier de la serie escrita en términos de senos y cosenos satisfacen la desigualdad $|a_n|,|b_n|<M/n^2\ \forall n, con\ M\ independiente\ de\ n$

6. a. Calcule $\int \delta(x^2-1)f(x)dx$, en función de f(x).
b .Muestre que $\delta_n(x)=\begin{cases}n e^{-nx}, & x>0\\ 0, & x<0\end{cases}$ define la "función" delta de Dirac.
c. Muestre que $x\frac{d}{dx}\delta(x)=-\delta(x)$.
d. Muestre que $\int \delta'(x)f(x)dx=-f'(0)$.

7. Muestre que en coordenadas esféricas $\delta(\vec{r}_1-\vec{r}_2)=\frac{1}{r_1^2}\delta(r_1-r_2)\delta(\cos\theta_1-\cos\theta_2)\delta(\phi_1-\phi_2)$

8. Muestre que $\int e^{i\vec{k}\vec{r}}\frac{d^3k}{(2\pi)^3\vec{k}^2}dx=\frac{1}{4\pi|\vec{r}|}$

9. Calcule la trasformada de Fourier de las funciones (a>0)
$u_a(x)=\begin{cases}1, & |x|<a\\ 0, & |x|>a\end{cases},\quad f(x)=e^{-ax^2},\quad f(x)=e^{-a|x|},\quad f(x)=\begin{cases}e^{-ax}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$

10. a. Calcule las transformadas de Fourier de f(x) y la misma trasladada f(x-a).
b. Aplique a $\delta(x)$ y $\delta(x-a)$. Considere ahora una función "peine", suma infinita de Delta de Dirac: $\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\delta(x-n\Delta x)$ y muestre que su transformada es también un peine en el espacio de Fourier de período $\frac{1}{\Delta x}$.
b. Muestre que la transformada de Fourier es real (imaginaria pura) si y solo si la función es par (impar).

11. Muestre que se cumplen las siguientes propiedades para F(y), transformada de Fourier de una función f(x):

$$TF[f(-x)](y)=F(-y),\quad TF\left[f(\frac{x}{a})\right](y)=a F(a y),\quad si\ a>0,$$
$$TF[f(x-b)](y)=e^{-iby}F(y),\quad TF[f(x)e^{-bx}](y)=F(y-b)$$