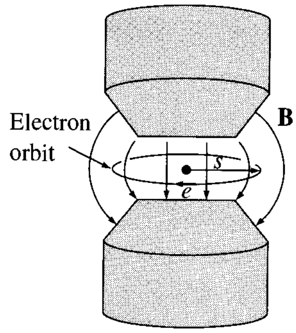
Física de Radiaciones 1 - Hoja 1 - 2012

1. Suponga que $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -1/(4\pi\varepsilon_0)\ q/r^2\ \theta(vt-r)\ \mathbf{r}/r$; $\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \mathbf{0}$ donde θ es la función de Heaviside. Muestre que estos campos satisfacen las ecuaciones de Maxwell y determine la densidad de carga ρ y corriente $\mathbf{J}$. Describa la situación física a la que corresponde.

2. Los electrones en un ciclotrón pueden aumentar su velocidad por medio de un campo magnético, mientras que es el campo eléctrico el que les imparte aceleración tangencial. Esto es lo que ocurre en los betatrones. Se trata de mantener el radio de la órbita constante durante el proceso. Muestre que esto es posible diseñando un imán tal que el campo promedio en el área de la órbita sea el doble que el campo en la circunferencia. Asuma que los electrones parten del reposo con campo nulo y que el aparato es simétrico alrededor del centro de la órbita. Asuma que los electrones son no relativistas (porqué?).



3. Deduzca la ley de Coulomb usando en tensor de Maxwell. Considere dos cargas iguales a distancia 2a. Construya el plano equidistante de las cargas. Integre el tensor de Maxwell en este plano y determine la fuerza entre las cargas. Repita para dos cargas de signo opuesto.

4. Considere que un electrón es una cáscara esférica de carga uniforme que rota con velocidad angular w.
   a. Calcule la energía total y el momento angular almacenados en los C.E.M..
   b. De acuerdo a la fórmula de Einstein $E= mc^2$ esta energía debe contribuir a la masa del electrón. Lorentz y otros han especulado que toda la masa del electrón tiene este origen y por tanto $U_{em} = m_e c^2$. Suponga además que todo el momento angular de espín del electrón tiene origen en los C.E.M.: $L_{em} = \hbar/2$. Usando estas dos suposiciones determine el radio y velocidad angular del electrón. Calcule el producto wR. Tiene sentido este modelo clásico?

5. Repitiendo los cálculos dados en clase, pero utilizando $\mathbf{J}_f$ en vez de $\mathbf{J}$ deduzca la expresión del vector de Poynting para un medio material $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ y muestre que $\partial u_{em}/\partial t = \mathbf{E} \cdot \partial\mathbf{D}/\partial t + \mathbf{H} \cdot \partial\mathbf{B}/\partial t$. Para medios lineales muestre que $u_{em} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}$. Sin construir explícitamente el tensor de Maxwell para medios materiales muestre que la densidad de momento lineal es $\mathcal{P} = \mathbf{D} \times \mathbf{B}$.

6. La intensidad de la luz solar en la Tierra es aproximadamente 1300 W/m^2. Calcule la presión que ejerce sobre un absorbente perfecto y sobre un reflector perfecto. Compare este valor con la presión atmosférica. Se ha especulado acerca de la posibilidad de construir naves espaciales usando la presión de radiación. Calcule la aceleración que esta presión le imprime a una vela de densidad 1 gramo/m^2 y compare esta presión con la ejercida por el viento solar (5 protones por cm^3 con velocidad 400 km/s).

7. La notación compleja permite calcular promedios temporales en forma mucho más fácil. Considere $f(\mathbf{r},t) = A \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - wt + \delta_a)$ y $g(\mathbf{r},t) = B \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - wt + \delta_b)$ y las mismas funciones expresadas en notación compleja $\tilde{f}$ y $\tilde{g}$ muestre que $\langle fg \rangle = 1/2\ \mathrm{Re}\{\tilde{f}\,\tilde{g}^*\}$. Escriba entonces $\langle u \rangle$ y $\langle \mathbf{S} \rangle$ en función de los C.E.M. en notación compleja.

8. a. Suponga que se colocan cargas libres en vidrio; estime el tiempo que les llevaría a las mismas fluir hacia la superficie.
   b. La plata es un excelente conductor. Suponga que diseña un experimento de microondas

para operar con frecuencia 10^{10} Hz. Estime el espesor mínimo del blindaje de plata.
c. Encuentre la longitud de onda y la velocidad de propagación en cobre para ondas de radio de 1 M Hz. Compare con los valores correspondientes en aire y vacío.

9. a. Calcule la penetración en un mal conductor y muestre que no depende de la frecuencia. Encuentre la penetración en agua pura, expresada en metros. Considere agua de mar con $\sigma = 4.3\ (\Omega\ m)^{-1}$, $\mu \approx \mu_0$ y $\varepsilon = 80\ \varepsilon_0$, calcule la penetración para ELF (ondas de extrema baja frecuencia) de 100 Hz y considere las mismas para comunicaciones entre submarinos.
   b. Muestre que la penetración en un buen conductor es $\lambda/2\pi$, siendo λ la longitud de onda en el conductor. Calcule la penetración en nanometros para un metal típico ($\sigma \approx 10^7\ (\Omega\ m)^{-1}$) en el rango visible ($\omega \approx 10^{15}\ s^{-1}$) asumiendo que las constantes de permeabilidad magnética y dieléctrica son similares las del vacío. Discuta porqué los metales son opacos. Concluya que en los metales son buenos conductores las ondas E.M. tienen corta longitud de onda y longitud de penetración y alto indice de refracción.
   c. Muestre que en un buen conductor el C.M. atrasa 45^{o} respecto del C.E. y encuentre el cociente de las amplitudes. Calcule este valor para un metal típico, como en la parte anterior.
   d. Calcule el promedio temporal de la densidad de energía de una onda electromagnética plana en un medio conductor. Muestre que la contribución magnética siempre domina.
   e. Calcule la intensidad en función de la distancia de penetración.

10. Considere una onda esférica $\mathbf{E}(r,\theta,\Phi, t) = A \sin\theta /r\ [\cos (kr-wt) - (1/kr) \sin (kr-wt)]\ \mathbf{\Phi}$ con $w/k=c$ y $\mathbf{\Phi}$ el versor correspondiente a la coordenada azimutal.
    a. Verifique que este C.E. verifica las ecuaciones de Maxwell en el vacío. Calcule el C.M..
    b. Calcule el vector de Poynting. Calcule el promedio temporal y obtenga el vector intensidad **I**. Discute si este último tiene la dirección que se esperaría, y si decae como r^{-2}.
    c. Integre el vector intensidad en una superficie esférica para determinar la potencia total radiada.

11. Encuentre las distribuciones de carga y corriente que dan origen a los potenciales
    $V = 0$, $\mathbf{A} = \mu_0 k/4c\ (ct-|x|)^2\ \mathbf{z}$ para $|x| < ct$, y $\mathbf{A}=0$ en otro caso.

12. Muestre que las ecuaciones de onda con fuentes para V y A pueden ser escritas en forma simétrica
    $\Box^2 V + \partial L/\partial t = - \rho/\varepsilon_0$,
    $\Box^2 \mathbf{A} - \nabla L = - \mu_0 \mathbf{J}$,
    donde $\Box^2 = \nabla^2 - \mu_0 \varepsilon_0 \partial^2 L/\partial t^2$ y $L = - \nabla\cdot\mathbf{A} + \mu_0 \varepsilon_0 \partial V/\partial t$.

13. Verifique que se satisfacen las ecuaciones de Maxwell y encuentre los campos, corrientes y carga correspondientes a
    a. $V(\mathbf{r},t)=0$, $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)= -1/(4\pi\varepsilon_0)\ qt/r^2\ \mathbf{r}/r$. Use la función de gauge $\lambda= -1/(4\pi\varepsilon_0)\ qt/r$ para transformar los potenciales y comente el resultado.
    b. $V=0$, $\mathbf{A}= A_0 \sin(kx - wt)\ \mathbf{y}$. Indique qué relación deben cumplir k y w.

14. Deducción de las leyes de reflexión y refracción a partir del carácter ondulatorio. Considere dos medios y una onda que incide en la interfase. Se establecen en los medios ondas reflejadas y refractadas, y en la interfase se verifican condiciones de borde del tipo
    $(..) \exp(\mathbf{k_i} \cdot \mathbf{r} - wt) + (..) \exp(\mathbf{k_r} \cdot \mathbf{r} - w't) = (..) \exp (\mathbf{k_t} \cdot \mathbf{r} - w''t)$
    Deduzca de lo anterior la igualdad de las frecuencias, que los tres vectores de onda están en un plano al que pertenece la normal a la interfase y deduzca las leyes de reflexión y refracción.